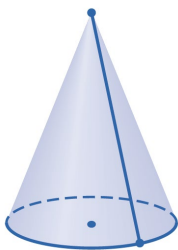


14.1

- a ja b)** Piirretään geometriaohjelman 2D-piirtoalueessa kartion pohjaksi ympyrä, jonka säde on $5,0$. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa ympyrä suoraksi ympyräkartioksi, jonka korkeus on $12,0$. Valitaan pohjaympyrän kehältä jokin piste ja yhdistetään se janalla kartion huippuun.



Kartion sivujana, korkeusjana ja pohjan säde muodostavat suorakulmaisen kolmion.

Lasketaan sivujanen pituus s Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = 5,0^2 + 12,0^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$s = 13,0 \text{ tai } s = -13,0$$

Pituus on positiivinen luku, joten $s = 13,0$.

- c)** Lasketaan kartion tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} A_p h \quad \text{Pohja on ympyrä, joten } A_p = \pi r^2.$$

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \quad \text{Sijoitetaan } r = 5,0 \text{ ja } h = 12,0.$$

$$= \frac{1}{3} \pi \cdot 5,0^2 \cdot 12,0$$

$$= 314,15... \approx 314$$

Kartion tilavuus on 314 .

Lasketaan kartion vaipan pinta-ala.

$$A_p = \pi r s \quad \text{Sijoitetaan } r = 5,0 \text{ ja } s = 13,0.$$

$$= \pi \cdot 5,0 \cdot 13,0$$

$$= 204,20... \approx 204$$

Vaipan pinta-ala on 204 .

Vastaus

- a)** $13,0$ **b)** tilavuus 314 , pinta-ala 204

14.2

a) Lasketaan kartion tilavuus.

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_p h \\ &= \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h \\ &= \frac{1}{3} \pi \cdot 1,5^2 \cdot 4,0 \\ &\approx 9,4 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

b) Lasketaan pyramidin tilavuus.

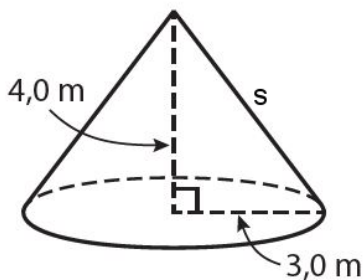
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} A_p h \\ &= \frac{1}{3} \cdot 5,0^2 \cdot 8,0 \\ &\approx 67 \text{ (m}^3\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

a) $9,4 \text{ cm}^3$

b) 67 m^3

14.3



Ratkaistaan sivujanan pituus s Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = 3,0^2 + 4,0^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$s = 5,0 \text{ tai } s = -5,0$$

Pituus on positiivinen luku, joten $s = 5,0$ m.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A = \pi r s$$

$$= \pi \cdot 3,0 \cdot 5,0$$

$$\approx 47 \text{ (m}^2\text{)}$$

Katon päällystämiseen tarvitaan 47 m^2 kuparilevyä.

Vastaus

$$47 \text{ m}^2$$

14.4

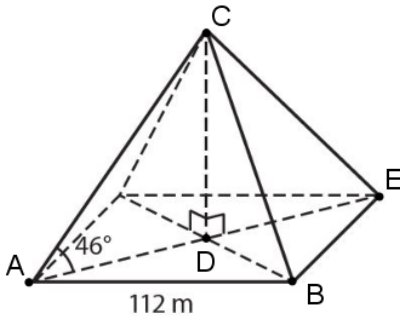
- a) Kartiolla on huippu, vaippa ja pohja. Kartioita ovat kappaleet 1 ja 4.
- b) Pyramidi on kartio, jonka pohja on monikulmio. Kappale 1 on pyramidi.

Vastaus

- a) 1 ja 4
- b) 1

14.5

a)



Kolmio ABE on suorakulmainen. Ratkaistaan lävistäjän AE pituus Pythagoraan lauseella.

$$AE^2 = 112^2 + 112^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$AE \approx 158,392 \text{ tai } AE \approx -158,392$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AE \approx 158,392 \text{ m}$.

Kolmio ADC on suorakulmainen. Lasketaan kateetin AD pituus.

$$AD = \frac{AE}{2} \approx \frac{158,392 \text{ m}}{2} \approx 79,196 \text{ m}$$

Ratkaistaan pyramidin korkeus DC .

$$\tan 46^\circ = \frac{DC}{79,196}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$DC \approx 82,0098 \approx 82 \text{ (m)}$$

b) Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

Pohja on neliö, joten $A_p = a^2$.

$$= \frac{1}{3} a^2 h$$

Sijoitetaan $a = 112$ ja $h \approx 82,0098$.

$$\approx \frac{1}{3} \cdot 112^2 \cdot 82,0098$$

$$\approx 340\,000 \text{ (m}^3\text{)}$$

Vastaus

a) 82 m b) 340 000 m³

14.6

Vaippa koostuu viidestä tasakylkisestä kolmiosta, joiden kanta on 8,0 m ja korkeus 12,0 m.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

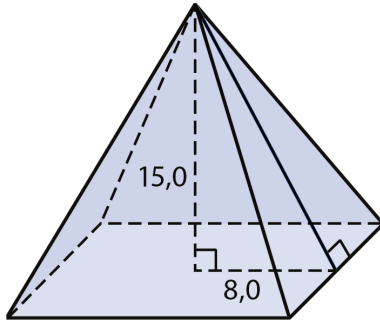
$$\begin{aligned} A_v &= 5 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8,0 \cdot 12,0 \\ &= 240 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

240 m²

14.7

Piirretään geometriaohjelman 2D-piirtoalueessa pyramidin pohjaksi neliö, jonka sivun pituus on 16,0. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa neliö suoraksi pyramidiksi, jonka korkeus on 15,0.



- a) Ratkaistaan sivutahkon korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat 15,0 ja 8,0.

$$h^2 = 8,0^2 + 15,0^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$h = 17,0 \text{ tai } h = -17,0$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = 17,0$.

- b) Sivutahko on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on 16,0 ja korkeus 17,0. Lasketaan tahkon pinta-ala.

$$A_t = \frac{16,0 \cdot 17,0}{2} = 136$$

- c) Pyramidi muodostuu neliön muotoisesta pohjasta ja neljästä sivutahkosta.

Lasketaan kokonaispinta-ala.

$$\begin{aligned} A &= A_p + 4 \cdot A_t \\ &= 16,0^2 + 4 \cdot 136 \\ &= 800 \end{aligned}$$

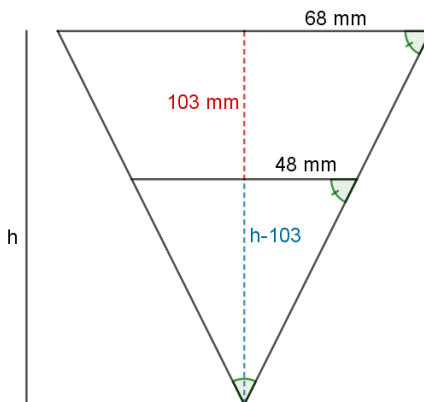
Vastaus

- a) 17,0 b) 136 c) 800

14.8

Juomatölkki voidaan täydentää kartioksi. Tölkin tilavuus saadaan, kun tämän kartion tilavuudesta vähennetään pienemmän, poisleikatun kartion tilavuus.

Kun kartio halkaistaan pystysuunnassa, leikkauspinnalle muodostuu kaksi sisäkkäistä kolmiota.



Kolmiot ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella: kolmioilla on yhteinen huippukulma, ja koska kolmioiden kannat ovat yhdensuuntaiset, myös niiden kantakulmat ovat yhtä suuret.

Muodostetaan vastinpituuksista verrantoyhtälö ja ratkaistaan kartion korkeus h .

$$\frac{h}{h-103} = \frac{68}{48}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 350,2 \text{ (mm)}$$

Suuremman kartion korkeus on 350,2 mm

ja pohjan säde $\frac{68 \text{ mm}}{2} = 34 \text{ mm}$.

Poisleikatun kartion korkeus on $h - 103 = 350,2 - 103 = 247,2 \text{ (mm)}$

ja pohjan säde $\frac{48 \text{ mm}}{2} = 24 \text{ mm}$.

Lasketaan tölkin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 34^2 \cdot 350,2 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 24^2 \cdot 247,2 \quad \text{Ympyräkartion tilavuus } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

$$\approx 270000 \text{ (mm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus millilitroina.

$$270000 \text{ mm}^3 = 270 \text{ cm}^3 = 270 \text{ ml}$$

Vastaus

270 ml

14.9

- a) Suuaukon säde on $\frac{5,8}{2} = 2,9$ (cm).

Lasketaan lasin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2,9^2 \cdot 13,6 \approx 120 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus senttilitroina.

$$120 \text{ cm}^3 = 120 \text{ ml} = 12 \text{ cl}$$

- b) **Tapa 1. Ratkaistaan kuohuviinikartion mitat**

Lasissa oleva juoma muodostaa pienemmän yhdenmuotoisen kartion.

Ratkaistaan kartion pohjan säde x verrantoyhtälöllä.

$$\frac{2,9}{x} = \frac{13,6}{6,8}$$

$$x = 1,45 \text{ (cm)}$$

Lasketaan juoman tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1,45^2 \cdot 6,8 \approx 15 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Juoman tilavuus on $15 \text{ cm}^3 = 15 \text{ ml} = 1,5 \text{ cl}$.

Tapa 2. Mittakaavan avulla

Lasissa oleva juoma muodostaa pienemmän yhdenmuotoisen kartion. Yhdenmuotoisten kappaleiden tilavuuksien suhde on mittakaavan kuutio.

$$\frac{V_2}{V_1} = k^3$$

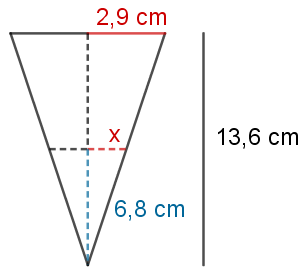
$$\frac{V_2}{12 \text{ cl}} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$V_2 \approx 1,5 \text{ cl}$$

Juoman tilavuus on $1,5 \text{ cl}$.

Vastaus

- a) 12 cl b) 1,5 cl



Ratkaistaan CAS-laskimella.

14.10

Kartion pohjan säde on $r = \frac{12,0 \text{ cm}}{2} = 6,0 \text{ cm}$.

Tapa 1. Ratkaistaan sektorin pinta-alan avulla.

Lasketaan kartion vaipan pinta-ala.

$$A = \pi r s$$

$$= \pi \cdot 6,0 \cdot 10,4$$

$$\approx 196,035 \text{ (cm}^2\text{)}$$

Tasoon levitetty vaippa on ympyräsektori, jonka säde on 10,4 cm ja pinta-ala 196,035 cm².

Ratkaistaan sektorin keskuskulma.

$$A_s = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

$$196,035 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 10,4^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha \approx 208^\circ$$

Tapa 2. Ratkaistaan sektorin kaaren pituuden avulla.

Lasketaan kartion pohjaympyrän kehän pituus.

$$p = 2\pi r$$

$$= 2\pi \cdot 6,0$$

$$\approx 37,699 \text{ (cm)}$$

Tasoon levitetty vaippa on ympyräsektori, jonka säde on 10,4 cm ja kaaren pituus 37,699 cm.

Ratkaistaan sektorin keskuskulma.

$$b = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

$$37,699 = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 10,4 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

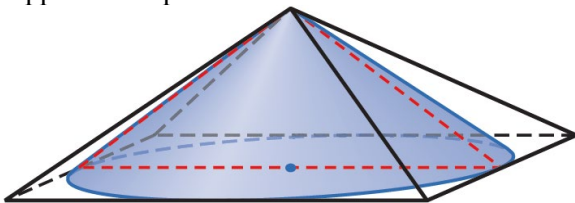
$$\alpha \approx 208^\circ$$

Vastaus

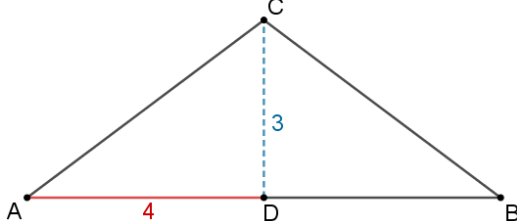
208°

14.11

- a) Piirretään ensin kappaleiden pohjat 2D-piirtoalueessa ja täydennetään kappaleet 3D-piirtoalueessa kartioiksi.



- b) Piirretään leikkauskuvio.



Sivut AC ja BC ovat yhtä pitkät. Ratkaistaan sivun AC pituus.

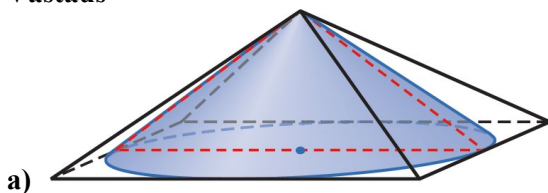
$$4^2 + 3^2 = AC^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$AC = 5 \text{ tai } AC = -5$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AC = 5$

Vastaus



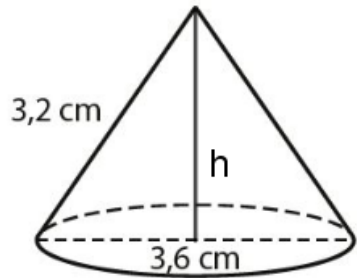
a)



b)

14.12

Ympyräkartion korkeus h on kateettina suorakulmaisessa kolmiossa, jonka toisen kateetin pituus on $\frac{3,6 \text{ cm}}{2} = 1,8 \text{ cm}$ ja hypotenuusan pituus $3,2 \text{ cm}$.



Ratkaistaan h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 1,8^2 = 3,2^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$h \approx -2,646 \text{ tai } h \approx 2,646$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h \approx 2,646 \text{ cm}$.

Lasketaan kartion tilavuus.

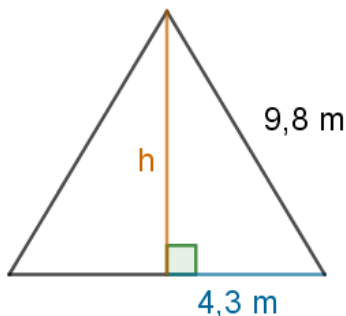
$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \pi r^2 h \\ &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 1,8^2 \cdot 2,646 \\ &\approx 9,0 \text{ (cm}^3\text{)} \end{aligned}$$

Vastaus

$$9,0 \text{ cm}^3$$

14.13

a) Piirretään pyramidin pohjaa vastaan kohtisuora huipun kautta kulkeva poikkileikkaus.



Ratkaistaan pyramidin korkeus h .

$$h^2 + 4,3^2 = 9,8^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$h \approx 8,8062 \text{ tai } h \approx -8,8062$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h \approx 8,8 \text{ m}$.

b) Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

$$\approx \frac{1}{3} \cdot 8,6^2 \cdot 8,8062$$

$$\approx 220 \text{ (m}^3\text{)}$$

Vastaus

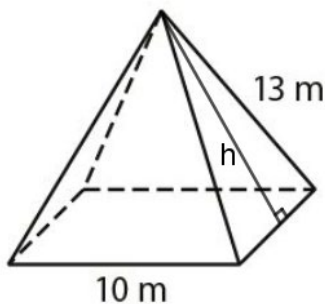
a) 8,8 m

b) 220 m³

14.14

Sivutahko on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on 10 m ja sivun pituus 13 m.

Ratkaistaan sivutahkon korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta Pythagoraan lauseella.



$$h^2 + 5^2 = 13^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = -12 \text{ tai } h = 12$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = 12$ m.

Lasketaan vaipan pinta-ala.

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = 240 \text{ (m}^2\text{)}$$

Vastaus

$$240 \text{ m}^2$$

14.15

Suoran ympyräkartion pohjaympyrän säde on 5,0 metriä.
Ratkaistaan kartion sivujanan pituus s Pythagoraan lauseella.

$$s^2 = 5,0^2 + 14,4^2 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$
$$s \approx -15,243 \quad \text{tai} \quad s \approx 15,243$$

Pituus on positiivinen luku, joten $s \approx 15,243 \text{ m}$.

Lasketaan kartion vaipan pinta-ala.

$$\begin{aligned} A_v &= \pi r s \\ &= \pi \cdot 5,0 \cdot 15,243 \\ &\approx 239 \text{ (m}^2\text{)} \end{aligned}$$

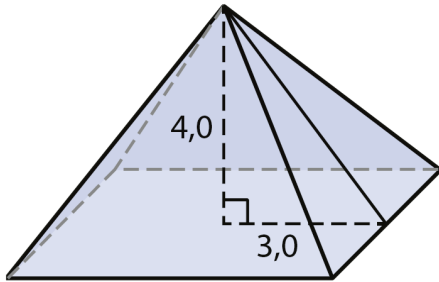
Maalattava pinta-al on 239 m^2 .

Vastaus

$$239 \text{ m}^2$$

14.16

Piirretään geometriaohjelman 2D-piirtoalueessa pyramidin pohjaksi neliö, jonka sivun pituus on 6,0. Laajennetaan 3D-piirtoalueessa neliö suoraksi pyramidiksi, jonka korkeus on 4,0.



- a) Ratkaistaan sivutahkon korkeus h suorakulmaisesta kolmiosta, jonka kateetit ovat 4,0 ja 3,0.

$$h^2 = 4,0^2 + 3,0^2$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 5,0 \text{ tai } h = -5,0$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h = 5,0$.

- b) Sivutahko on tasakylkinen kolmio, jonka kanta on 6,0 ja korkeus 5,0. Lasketaan tahkon pinta-ala.

$$A_t = \frac{6,0 \cdot 5,0}{2} = 15$$

- c) Sivutahkon ja pohjatahkon välinen kulma α on kuvion suorakulmaisen kolmion kantakulma.

Ratkaistaan kulman α suuruus.

$$\tan \alpha = \frac{4,0}{3,0}$$

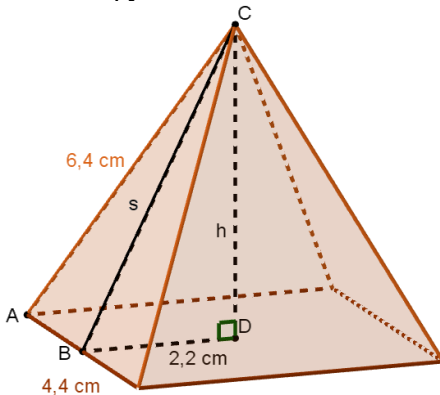
$$\alpha = \tan^{-1} \left(\frac{4,0}{3,0} \right) \approx 53^\circ$$

Vastaus

- a) 5,0 b) 15 c) 53°

14.17

Piirretään pyramidi.



Kolmio ABC on suorakulmainen. Ratkaistaan sivutahkon korkeus s Pythagoraan lauseella.

$$s^2 + 2,2^2 = 6,4^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$s \approx -6,00999 \text{ tai } s \approx 6,00999$$

Pituus on positiivinen luku, joten $s \approx 6,00999 \text{ cm}$.

Kolmio BDC on suorakulmainen. Ratkaistaan pyramidin korkeus h Pythagoraan lauseella.

$$h^2 + 2,2^2 = 6,00999^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$h \approx -5,5929 \text{ tai } h \approx 5,5929$$

Pituus on positiivinen luku, joten $h \approx 5,5929 \text{ cm}$.

Lasketaan pyramidin tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} A_p h$$

$$\simeq \frac{1}{3} \cdot 4,4^2 \cdot 5,5929$$

$$\approx 36 \text{ (cm}^3\text{)}$$

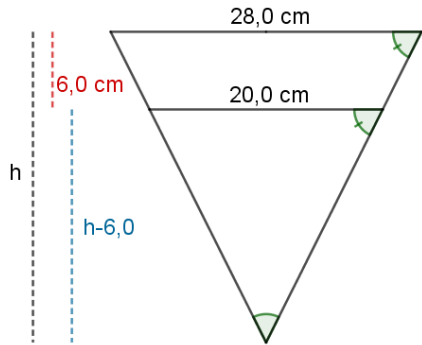
Vastaus

$$36 \text{ cm}^3$$

14.18

Paistinpannu voidaan täydentää kartioksi. Pannun tilavuus saadaan, kun tämän kartion tilavuudesta vähennetään pienemmän, poisleikatun kartion tilavuus.

Kun kartio halkaistaan pystysuunnassa, leikkauspinnalle muodostuu kaksi sisäkkäistä kolmiota.



Kolmio ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella: kolmioilla on yhteinen huippukulma, ja koska kolmioiden kannat ovat yhdensuuntaiset, myös niiden kantakulmat ovat yhtä suuret.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan isomman kartion korkeus h .

$$\frac{h}{h-6,0} = \frac{28,0}{20,0}$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$h = 21,0 \text{ (cm)}$$

Suuremman kartion korkeus on 21,0 cm ja pohjan säde 14,0 cm.

Pienemmän kartion korkeus on 21,0 cm – 6,0 cm = 15,0 cm

ja pohjan säde 10,0 cm.

Lasketaan paistinpannun tilavuus.

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 14,0^2 \cdot 21,0 - \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 10,0^2 \cdot 15,0 \approx 2700 \text{ (cm}^3\text{)}$$

Ilmaistaan tilavuus litroina.

$$2700 \text{ cm}^3 = 2,7 \text{ dm}^3 = 2,7 \text{ L}$$

Vastaus

2,7 L

14.19

- a) Pahvi on puoliympyrä, jonka kaaren pituus on

$$b = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5,0 \text{ (cm)}.$$

Piirretään ympyräkartio.

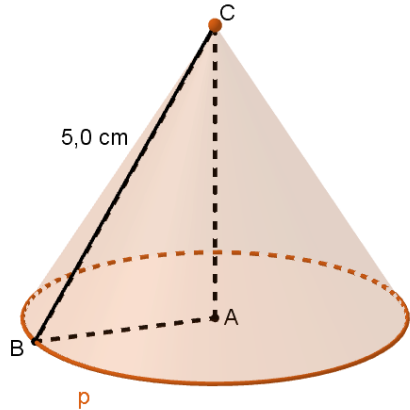
Ympyräkartion pohjan kehän pituus p on yhtä suuri kuin puoliympyrän kaaren pituus b . Ratkaistaan kartion pohjan säde r .

$$p = b$$

$$2\pi r = \frac{1}{2} \cdot 2\pi \cdot 5,0$$

$$r = 2,5 \text{ (cm)}$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)



Kartion pohjan säde on 2,5 cm.

- b) Kolmio ABC on suorakulmainen. Ratkaistaan kartion korkeus AC Pythagoraan lauseella.

$$2,5^2 + AC^2 = 5,0^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$AC \approx -4,3301 \text{ tai } AC \approx 4,3301$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AC \approx 4,3301 \text{ cm}$.

Kartion korkeus on 4,3 cm.

- c) Lasketaan kartion tilavuus.

$$A = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 2,5^2 \cdot 4,3301 \approx 28 \text{ (cm}^3\text{)}$$

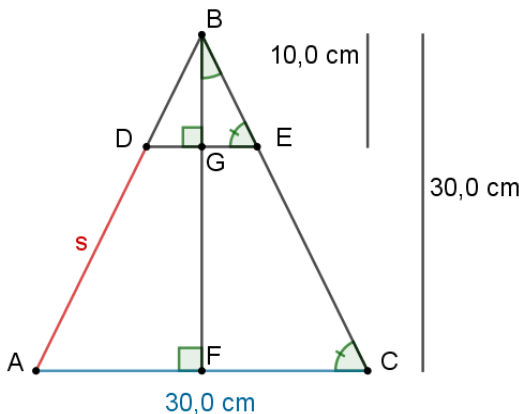
Kartion tilavuus on 28 cm^3 .

Vastaus

- a) 2,5 cm b) 4,3 cm c) 28 cm^3

14.20

- a) Varjostin voidaan täydentää suoraksi ympyräkartioksi.
Piirretään kartion poikkileikkaus.



Ratkaistaan janan AB pituus suorakulmaisesta kolmiosta AFB Pythagoraan lauseella.

$$AB^2 = AF^2 + FB^2$$

$$AB^2 = 15,0^2 + 30,0^2$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

$$AB \approx -33,5410 \text{ tai } AB \approx 33,5410$$

Pituus on positiivinen luku, joten $AB \approx 33,5410 \text{ cm}$.

Kolmiot AFB ja DGB ovat yhdenmuotoiset kk-lauseen perusteella: Molemmissa on suorakulma ja kulma B on yhteinen.

Muodostetaan verrantoyhtälö ja ratkaistaan janan DB pituus.

$$\frac{DB}{33,5410} = \frac{10,0}{30,0}$$

[Ratkaistaan CAS-laskimella.](#)

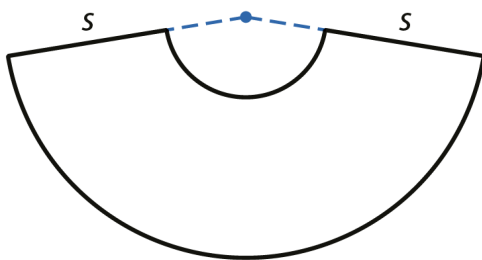
$$DB \approx 11,1803 \text{ (cm)}$$

Lasketaan sivujan S pituus.

$$S \approx 33,5410 - 11,1803 \approx 22,4 \text{ (cm)}$$

Sivujan S pituus on 22,4 cm.

- b) Hahmotellaan kuva tasoon levitetystä varjostimesta.



- c) Tasoon levitetyn varjostimen ulomman kaaren pituus on yhtä suuri kuin muotoon ommellun varjostimen pohjan kehän pituus.

Ratkaistaan auki leikatun varjostimen keskuskulman α suuruus.

$$\frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi \cdot 33,5410 \approx 2\pi \cdot 15,0 \quad \text{Ratkaistaan CAS-laskimella.}$$

$$\alpha \approx 160,997^\circ$$

Varjostimen pinta-ala on isomman ja pienemmän sektorin pinta-alojen erotus.

$$\begin{aligned} A &\approx \frac{160,997^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 33,5410^2 - \frac{160,997^\circ}{360^\circ} \cdot \pi \cdot 11,1803^2 \\ &\approx 1405 \text{ (cm}^2\text{)} \end{aligned}$$

Varjostimen pinta-ala on 1405 cm².

Vastaus

a) 22,4 cm

c) 1405 cm²